Proceedings of IAM, V.1, N.1, 2012, pp.108-116

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ СКОРОСТЕЙ СОЛИТОНОВЫХ ВОЛН В НАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Н.В. Байрамова[1] , М.М. Муталлимов[1]

[1]Институт Прикладной Математики БГУ, Баку, Азербайджан
e-mail: n_bayramova@mail.ru

Резюме. Рассматривается численное решение нелинейного уравнения, описывающего распространения нелинейных волн в двухфазных континуумах. При этом, переходя в подвижную систему координат, с изменением масштаба времени и пространства исследуется эволюция волны от источника возмущения. В первом приближении получено дисперсионное уравнение для скорости стационарно бегущих линейных волн, во втором приближении - нелинейное уравнение эволюции, мера эффект нелинейности которого сильно зависит от скорости дисперсии волн, диссипации энергии, реологии твердых частиц и силы межфазного взаимодействия. Первое уравнение решается как система линейных алгебраических уравнений. Используя методом конечных разностей и решением первой задачи решается второе уравнения.

Ключевые слова: солитоные волны, аппроксимация, пористая среда.

AMS Subject Classification: 35Q51, 37K40

1. Введение

При распространении волн с бесконечно малой амплитудой на земной коре, вместе ними может возникать нелинейные волны с конечной амплитудой. В зависимости от состава пористой среды нелинейные волны, создаваемые источником возмущения могут трансформироваться на близкие и дальние расстояния. Среди нелинейных волн существует такие волны, которые распространяются на дальние расстояние без изменении формы. Существование таких волн в земной коре доказаны геофизическими наблюдениями. Нелинейные волны содержать больше информации, чем линейные волны. Среди них наибольший интерес представляют изолированные, т.е. солитоновые волны.

Основную многофазных пористых сред составляет скелет, а меньшая по долю поры насыщены газожидкостной смеси или одной из этих фаз. В рассматриваемой задаче средой является твердая среда, насыщенная водой. В работах [1,2] Т.Рамазановым рассмотрены в разных средах задача трансформации волн во время возмущений. В этих работах показано, что если фазы многофазной пористой среды находятся в относительном покое, то в зависимости от реологии насыщенной пористой среды возмущения могут распространятся солитоновыми волнами. Эти конечно амплитудные волны, которые распространяют большие энергии, ускоряют разрушение среды. Аналогичные задачи рассматривались в работах [3,4].

2. Постановка задачи

Для математической формулировки задачи даются уравнение неразрывности среды

$$\frac{\partial(\alpha_i\rho_i)}{\partial t}+\frac{\partial(\alpha_i\rho_i\upsilon_i)}{\partial x}=0, \tag{1}$$

уравнение движения среды

$$\frac{\partial(\alpha_i\rho_i\upsilon_i)}{\partial t}+\frac{\partial(\alpha_i\rho_i\upsilon_i\upsilon_i)}{\partial x}=\delta_{1i}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\alpha_i\frac{\partial P}{\partial x}-(-1)^i R_{12}, \tag{2}$$

закон реологической деформации

$$(b_0+\sum_{l=1}^{m}b_l\frac{D^l}{Dt^l})(\sigma+\gamma P)=(a_0+\sum_{l=1}^{n}a_l\frac{D^l}{Dt^l})e_1, \tag{3}$$

уравнение термодинамического состояния

$$\rho_1=\rho_1(\sigma_1,P),\qquad \rho_2=\rho_2(P), \tag{4}$$

где $\alpha_1+\alpha_2=1$ концентрация среды.

Система (1)-(4) замыкается кинематическим соотношением

$$\frac{\partial e_1}{\partial t}+\frac{\partial e_1\upsilon_1}{\partial x}=\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x}. \tag{5}$$

Здесь $i=1$ относится твердой фазе, $i=2$ жидкой фазе; $\rho_1,\rho_2,\upsilon_1,\upsilon_2$- соответственно средняя плотность и скорость твердой и жидкой фаз; $\sigma=\alpha_1(\Gamma-\mathrm{P})$, P-давление в жидкой фазе, Γ-истинное напряжение в твердой фазе; α-пористость среды; e_1-деформация твердой фазы; $a_0,a_1^0,...,a_m^0;b_0,b_1^0,...,b_m^0$-определенные константы конкретных самоэластичных жидкостей; γ- коэффициент расширения $(\gamma<0)$, или разжимания $(\gamma>0)$, δ_{ij}-единичный тензор.

3. Решение задачи

Система уравнений (1)-(5) рассматривается в движущийся координатной системе и принимаются новые параметры

$$X=\eta x,\qquad \tau=t-c^{-1}x. \tag{6}$$

Учитывая эти параметры, систему (1)-(5) можно преобразовывать в следующем виде [5-7]:

$$\frac{\partial(\alpha_i\rho_i)}{\partial\tau}+\eta\frac{\partial(\alpha_i\rho_i\upsilon_i)}{\partial X}-c^{-1}\frac{\partial(\alpha_i\rho_i\upsilon_i)}{\partial\tau}=0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial(\alpha_i\rho_i\upsilon_i)}{\partial\tau}+\eta\frac{\partial(\alpha_i\rho_i\upsilon_i\upsilon_i)}{\partial X}-c^{-1}\frac{\partial(\alpha_i\rho_i\upsilon_i\upsilon_i)}{\partial\tau}=$$
$$=\delta_{1i}\eta\frac{\partial\sigma}{\partial X}-c^{-1}\delta_{1i}\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}+\eta\alpha_i\frac{\partial P}{\partial X}-c^{-1}\alpha_i\frac{\partial P}{\partial\tau}-(-1)^i R_{12} \tag{8}$$

$$\left\{b_0+\sum_{l=1}^{m}b_l\prod_{q=1}^{l}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\eta\upsilon_1\frac{\partial}{\partial X}-c^{-1}\upsilon_1\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^q\right\}(\sigma+\gamma P)=$$
$$=\left\{a_0+\sum_{l=1}^{n}a_l\prod_{q=1}^{l}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\eta\upsilon_1\frac{\partial}{\partial X}-c^{-1}\upsilon_1\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^q\right\}e \tag{9}$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial\tau}+\eta\frac{\partial e_1\upsilon_1}{\partial X}-c^{-1}\frac{\partial e_1\upsilon_1}{\partial\tau}=\eta\frac{\partial\upsilon_1}{\partial X}-c^{-1}\frac{\partial\upsilon_1}{\partial\tau} \tag{10}$$

Представим искомые переменные в виде рядов по малому параметру $\eta \ll 1$

$$\alpha_1=\alpha_1^{(0)}+\eta\alpha_1^{(1)}+\eta^2\alpha_1^{(2)}+\ldots;\qquad \alpha_2=\alpha_2^{(0)}+\eta\alpha_2^{(1)}+\eta^2\alpha_2^{(2)}+\ldots;$$
$$\rho_1=\rho_1^{(0)}+\eta(D_1\sigma_1+L_1P_1)+\eta^2(D_1\sigma_2+L_1P_2+D_2\sigma_1^2+D_l\sigma_1P_1+L_2P_1^2)+\ldots; \tag{11}$$
$$\rho_2=\rho_1^{(2)}+\eta B_1P_1+\eta^2(B_1P_2+B_2P_1^2)+\ldots;$$
$$\sigma=\eta\sigma_1+\eta^2\sigma_2+\ldots;\qquad P=\eta P_1+\eta^2P_2+\ldots;\qquad \upsilon_i=\eta\upsilon_i^{(1)}+\eta^2\upsilon_i^{(2)}+\ldots,$$

где

$$B_1=\left.\frac{\partial\rho_2}{\partial P}\right|_{P_0};\qquad B_2=\frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2\rho_2}{\partial P^2}\right|_{P_0};\qquad L_1=\left.\frac{\partial\rho_1}{\partial P}\right|_{P_0};\qquad D_1=\left.\frac{\partial\rho_1}{\partial\sigma}\right|_{\sigma_0};$$
$$L_2=\frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2\rho_1}{\partial P^2}\right|_{P_0};\qquad D_2=\frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2\rho_1}{\partial\sigma^2}\right|_{\sigma_0};\qquad D_L=\left.\frac{\partial^2\rho_1}{\partial\sigma\partial P}\right|_{(P_0,\sigma_0)}, \tag{12}$$

где $\alpha_1^{(0)}, P_0$ и σ_0 -значения концентрации, давления и эффективного напряжения в неподвижном двухфазном континууме: $\upsilon_1^{(0)}=\upsilon_2^{(0)}=0$.

Члены $\alpha_1\rho_1, \alpha_2\rho_2, \alpha_1\rho_1\upsilon_1, \alpha_2\rho_2\upsilon_2, \alpha_1\rho_1\upsilon_1\upsilon_1, \alpha_2\rho_2\upsilon_2\upsilon_2$ представим в виде

$$\alpha_1\rho_1=\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)}+\eta(\alpha_1^{(0)}D_1\sigma_1+\alpha_1^{(0)}L_1P_1+\rho_1^{(0)}\alpha_1^{(1)})+\eta^2(\alpha_1^{(0)}D_1\sigma_2+\alpha_1^{(0)}L_1P_2+\alpha_1^{(0)}D_2\sigma_1^2+$$
$$+\alpha_1^{(0)}D_L\sigma_1P_1+\alpha_1^{(0)}L_2P_1^2+\alpha_1^{(0)}D_1\sigma_1+\alpha_1^{(1)}L_1P_1+\rho_1^{(0)}\alpha_1^{(2)})+\ldots;$$
$$\alpha_2\rho_2=\alpha_2^{(0)}\rho_2^{(0)}+\eta(\rho_2^{(0)}\alpha_2^{(1)}+\alpha_2^{(0)}B_1F_1)+\eta^2[\rho_2^{(0)}\alpha_2^{(2)}+B_1P_1\alpha_2^{(1)}+\alpha_2^{(0)}(B_2P_1^2+B_1P_2)]+\ldots;$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\rho_1\upsilon_1 = \eta\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)}\upsilon_1^{(1)} + \eta^2[(\alpha_1^{(0)}D_1\sigma_1 + \alpha_1^{(0)}L_1P_1 + \rho_1^{(0)}\alpha_1^{(1)})\upsilon_1^{(1)} + \upsilon_1^{(2)}\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)}] + ...;\\
&\alpha_2\rho_2\upsilon_2 = \eta\alpha_2^{(0)}\rho_2^{(0)}\upsilon_2^{(1)} + \eta^2[\alpha_2^{(0)}\rho_2^{(0)}\upsilon_2^{(2)} + (\rho_2^{(0)}\alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(0)}B_1P_1)\upsilon_2^{(1)}] + ...;\\
&\alpha_1\rho_1\upsilon_1\upsilon_1 = \eta^2\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)}\upsilon_1^{(1)}\upsilon_1^{(1)} + ...;\\
&\alpha_2\rho_2\upsilon_2\upsilon_2 = \eta^2\alpha_2^{(0)}\rho_2^{(0)}\upsilon_2^{(1)}\upsilon_2^{(1)} + ...;\\
&\upsilon_1 - \upsilon_2 = \eta(\upsilon_1^{(1)} - \upsilon_2^{(1)}) + \eta^2(\upsilon_1^{(2)} - \upsilon_2^{(2)}) + ...
\end{aligned} \tag{13}$$

Если разложения (11)-(13) подставим в систему уравнений (7)-(10) и приравниваем коэффициенты членов с одинаковыми степенями η в первом приближении, получается система однородных уравнений

$$\begin{cases}
\alpha_1^{(0)}D_1\sigma_1 + \alpha_1^{(0)}L_1P_1 + \rho_1^{(0)}\alpha_1^{(1)} - c^{-1}\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)}\upsilon_1^{(1)} = 0\\
\rho_2^{(0)}\alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(1)}B_1P_1 - c^{-1}\alpha_2^{(0)}\rho_2^{(0)}\upsilon_2^{(1)} = 0\\
\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)}\upsilon_1^{(1)} + c^{-1}\sigma_1 + c^{-1}\alpha_1^{(0)}P_1 = 0\\
\alpha_2^{(0)}\rho_2^{(0)}\upsilon_2^{(1)} + c^{-1}\alpha_2^{(0)}P_1 = 0\\
b_0(\sigma_1 + \gamma P_1) = a_0e_1\ ,\ \ \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} = 0\ ,\ \ e_1 = -c^{-1}\upsilon_1^{(1)}
\end{cases} \tag{14}$$

Система (14) имеет нетривиальное решение, если ее детерминант обращается в нуль, что дает следующее дисперсионное уравнение относительно скорости линейных волн - c:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)}b_0[\alpha_1^{(0)}\rho_2^{(0)}(L_1 - D_1\gamma) + \rho_1^{(0)}\alpha_2^{(0)}B_1]c^4 +\\
&+\left[\alpha_1^{(0)}\rho_2^{(0)}\left(\alpha_1^{(0)}a_0D_1 - a_0L_1 + \alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)}b_0 - \gamma\rho_1^{(0)}b_0\right) + \alpha_2^{(0)}\rho_1^{(0)}\left(\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)}b_0 - a_0B_1\right)\right]c^2 -\\
&-\alpha_2^{(0)}\rho_1^{(0)}a_0 = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

После обозначения

$$\begin{aligned}
&A = \alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)}b_0[\alpha_1^{(0)}\rho_2^{(0)}(L_1 - D_1\gamma) + \rho_1^{(0)}\alpha_2^{(0)}B_1],\\
&B = \left[\alpha_1^{(0)}\rho_2^{(0)}\left(\alpha_1^{(0)}a_0D_1 - a_0L_1 + \alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)}b_0 - \gamma\rho_1^{(0)}b_0\right) + \alpha_2^{(0)}\rho_1^{(0)}\left(\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)}b_0 - a_0B_1\right)\right],\\
&C = -\alpha_2^{(0)}\rho_1^{(0)}a_0,\\
&c^2 = \kappa
\end{aligned} \tag{16}$$

уравнение (15) получает следующий вид

$$A\kappa^2 + B\kappa + C = 0. \tag{17}$$

Для песочной среды в уравнении (17) примем следующие данные:

$$\rho_1^{(0)} = 262; \quad \rho_2^{(0)} = 100 \ ; \quad E_1 = 10^8 \ ; \quad E_2 = 10^9 \ ; \quad E_* = 10^7 \ ;$$
$$\theta = 10^{-4} \ ; \quad \theta_* = 10^{-2} \ ; \quad \beta_1 = 3*10^{-10} \ ; \quad \beta_2 = 4.4*10^{-9} \ ;$$
$$M_1 = 10^7 \ ; \quad M_2 = 10^6 \ ; \quad \alpha_1^{(0)} = 0.01; \quad \alpha_2^{(0)} = 0.99 \ ; \qquad (18)$$
$$\gamma = 0.2 \ ; \quad K_\nu = 5*10^6 \ ; \ L_1 = -\frac{\rho_1^{(0)}}{3}*\beta_1 \ ; \quad D_1 = -\frac{\rho_1^{(0)}}{3*\alpha_1^{(0)}}*\beta_1 \ ;$$
$$B_1 = -\rho_2^{(0)}*\beta_2 \ ; \ b_0 = 1 \ ; \quad a_0 = 10^9 \ .$$

Учитывая эти оценки в уравнении (17) скорость солитоновых волн получается: $c_1 \approx 19575$ и $c_2 \approx 1507$.

Во втором приближении получается нелинейное эволюционное уравнение

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial t} - R_2\upsilon\left(1 + \frac{b}{|R_1|}\left|1 - \frac{\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)} - a_0/\left(b_0c^2\right)}{\rho_1^{(0)}\left(\alpha_1^{(0)} - \gamma\right)}\right| * |\upsilon|\right) + R_3\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+1}A_{l+1}\frac{\partial^{l+1}\upsilon}{\partial T^{l+1}} = 0, \qquad (19)$$

$$A_{l+1} = \iota_{m-l}\frac{a_0b_l}{b_0} - \iota_{n-l}a_l, \iota_{n-l} = 1, n \ge 1, \iota_{n-l} = 0, n < l,$$

где

$$R_1 = \frac{\alpha_2^{(0)}(1 + c^2B_1)}{c\rho_2^{(0)}(\alpha_1^{(0)} - \gamma)^2}\left(\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)} - \frac{a_0}{b_0c^2}\right)\left(c^{-2}\rho_1^{(0)} - 2\rho_2^{(0)}L_1 + 2\rho_1^{(0)}B_1\right) +$$
$$+ \alpha_1^{(0)}\rho_2^{(0)}\left(2\rho_1^{(0)}\gamma - \frac{3a_0}{b_0c^2}\right)D_1 - c^{-2}\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)}\rho_2^{(0)} + \frac{a_0\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)}\rho_2^{(0)}}{b_0c^3}\left(2\alpha_1^{(0)}D_1 + c^{-2}\right) +$$
$$+ 2c^{-3}\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)}\rho_2^{(0)}\left(\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)} - \frac{a_0}{b_0c^2}\right) + 2c^{-3}\frac{\alpha_2^{(0)}\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}\left(\alpha_1^{(0)} - \gamma\right)^2}\left(\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)} - \frac{a_0}{b_0c^2}\right)^3 +$$
$$+ \frac{2c\alpha_1^{(0)}\rho_2^{(0)}}{\left(\alpha_1^{(0)} - \gamma\right)^2}\left(\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)} - \frac{a_0}{b_0c^2}\right)\left[\alpha_1^{(0)}\alpha_1^{(0)}\left(\rho_1^{(0)}\gamma - \frac{a_0}{b_0c^2}\right)^2 D_2 - \alpha_1^{(0)}\left(\rho_1^{(0)}\gamma - \frac{a_0}{b_0c^2}\right) \times\right.$$
$$\left.\times\left(\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)} - \frac{a_0}{b_0c^2}\right)D_L + \left(\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)} - \frac{a_0}{b_0c^2}\right)^2 L_2 + \frac{\alpha_2^{(0)}\rho_1^{(0)}}{\alpha_1^{(0)}\rho_2^{(0)}}\left(\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)} - \frac{a_0}{b_0c^2}\right)^2 B_2\right] / \Delta \ ,$$

$$R_2 = K_\nu\rho_2^{(0)}\left[\frac{a_0}{b_0c^2}\left(\alpha_1^{(0)}D_1 + c^{-2}\rho_1^{(0)}/\rho_2^{(0)}\right) + c^{-2}\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)}\left(1 - \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(1 - \frac{\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)} - a_0/\left(b_0c^2\right)}{\rho_1^{(0)}\left(\alpha_1^{(0)} - \gamma\right)}\right)\right] / \Delta,$$

$$R_3 = \frac{\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)}\rho_2^{(0)}}{b_0 c^2}\left(\alpha_1^{(0)}D_1 + c^{-2}\right)/\,\Delta,$$

$$\Delta = 2c\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)}\rho_2^{(0)}\left[\alpha_1^{(0)}\left(\frac{a_0}{b_0 c^2}D_1 + c^{-2}\rho_1^{(0)}\right)+.\right.$$

$$\left. + \frac{c^{-2}\alpha_2^{(0)}}{\alpha_1^{(0)}\rho_2^{(0)}\left(\alpha_1^{(0)}-\gamma\right)}\left(\alpha_1^{(0)}\rho_1^{(0)} - \frac{a_0}{b_0 c^2}\right)^2\right]$$

Уравнение (19) решается численным методом при следующих начальном и граничных условиях (n=2)

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial T} - R_1\upsilon + B\upsilon|\upsilon| + R_2 A_2\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial T^2} - R_3 A_3\frac{\partial^3 \upsilon}{\partial T^3} = 0\,, \tag{20}$$

$$\upsilon(0,T) = -R_1 e^{-2T^2}\,, \tag{21}$$

$$\upsilon(x,-\infty) = \upsilon(x,+\infty) = 0\,, \tag{22}$$

$$\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial T}\right|_{T\to+\infty} = \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial T}\right|_{T\to-\infty} = 0. \tag{23}$$

Для решения уравнения (21)-(23) используется метод конечных разностей или метод сеток [8]. Задача рассматривается в конечной области

G=$\{-M \le T \le M\,, 0 \le x \le L\}$.

4. Аппроксимация

Разобьем $[0,L]$ на m равных частей длины $l = L/m$, а $[-M,M]$ на n равных частей длиной $h = 2M/n$. Множество этих точек называется равномерной сеткой и обозначается

$$D_{l,h} = \{(x_i, T_j)\ :\ x_i = il\ ,\ T_j = -M + jh,\ i = 1,N\ ;\ j = 1,2M/l\}\ .$$

Аппроксимурием дифференциальные операторы в форме

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial X} \sim \frac{\upsilon_j^{i+1} - \upsilon_j^i}{l};\quad \frac{\partial \upsilon}{\partial T} \sim \frac{\upsilon_{j+1}^i - \upsilon_j^i}{h};\quad \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial T^2} \sim \frac{\upsilon_{j+1}^i - 2\upsilon_j^i + \upsilon_{j-1}^i}{h^2},$$
$$\frac{\partial^3 \upsilon}{\partial T^3} \sim \frac{\upsilon_{j+2}^i - 2\upsilon_{j+1}^i + 2\upsilon_{j-1}^i - \upsilon_{j-2}^i}{h^3}, \tag{24}$$

а начальные и граничные условия (21),(22),(23) в форме

$$\upsilon(0,T) \sim \upsilon_j^0\,;\quad \upsilon(x,-M) \sim \upsilon_0^j\,;\quad \upsilon(x,M) \sim \upsilon_m^i\,;$$

$$\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial T}\right|_{T=-M} \sim \frac{\upsilon_1^i - \upsilon_0^i}{h};\ \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial T}\right|_{T=M} \sim \frac{\upsilon_n^i - \upsilon_{n-1}^i}{h}.$$

После аппроксимации уравнение (20) имеет вид

$$\frac{\upsilon_j^{i+1}-\upsilon_j^i}{l}+\upsilon_j^i\frac{\upsilon_{j+1}^i-\upsilon_j^i}{h}-R_1\upsilon_j^i+B\upsilon_j^i\left|\upsilon_j^i\right|+R_3A_2\frac{\upsilon_{j+1}^i-2\upsilon_j^i+\upsilon_{j-1}^i}{h^2}-$$
$$-\frac{3}{8}R_3A_3\frac{\upsilon_{j+2}^i-2\upsilon_{j+1}^i+2\upsilon_{j-1}^i-\upsilon_{j-2}^i}{h^3}=0, \qquad (25)$$

или

$$8h^3\left(\upsilon_j^{i+1}-\upsilon_j^i\right)+8lh^2\upsilon_j^i\left(\upsilon_{j+1}^i-\upsilon_j^i\right)-8lh^3R_1\upsilon_j^i+8lh^3B\upsilon_j^i\left|\upsilon_j^i\right|+$$
$$+8lhR_3A_2\left(\upsilon_{j+1}^i-2\upsilon_j^i+\upsilon_{j-1}^i\right)-$$
$$-3lR_3A_3\left(\upsilon_{j+2}^i-2\upsilon_{j+1}^i+2\upsilon_{j-1}^i-\upsilon_{j-2}^i\right)=0.$$

Отсюда получаем значение для υ_j^{i+1}

$$\upsilon_j^{i+1}=\frac{1}{8h^3}\left\{3lR_3A_3\upsilon_{j+2}^i-\left(8lh^2+8lhR_3A_2+6lR_3A_3\right)\upsilon_{j+1}^i+\right.$$
$$+\left(8h^3+8lh^2+8lh^3R_1+16lhR_3A_2\right)\upsilon_j^i+ \qquad (26)$$
$$\left.+\left(6lR_3A_3-8lhR_3A_2\right)\upsilon_{j-1}^i-3lR_3A_3\upsilon_{j-2}^i-8lh^3B\upsilon_j^i\left|\upsilon_j^i\right|\right\}$$

Уравнение (27) решается при следующих начальных данных

$$M=5, L=6, n=55, m=5, \rho_1^{(0)}=262, \rho_2^{(0)}=100, E_1=10^8, E_2=10^9, E_*=10^7,$$
$$\theta=10^{-4}, \theta_*=10^{-2}, \beta_1=3*10^{-10}, \beta_2=4.4*10^{-9}, M_1=10^7, M_2=10^6, \alpha_1^{(0)}=0.01,$$
$$\alpha_2^{(0)}=0.99, b_0=1, a_0=10^9, \gamma=0.2, K_\nu=5*10^6, L_1=-\rho_1^{(0)}*\beta_1/3, \qquad (27)$$
$$D_1=-\rho_1^{(0)}*\beta_1/(3*(1-\alpha_1^{(0)})), B_1=-\rho_2^{(0)}*\beta_2, B_2=0, D_L=0, L_2=0, D_2=0,$$
$$A_2=-E_1*\theta-E_**\theta_*, A_3=-(E_1+E_*)*\theta*\theta_*-M_2, h=2*M/n, l=L/m,$$
$$T_1=-M, T_{n+1}=M, X_1=0, X_{m+1}=L$$

Решение задачи (26) определено при $c\approx19575$ и $c\approx1507$ и результаты показаны в виде графика (Рис. 1).

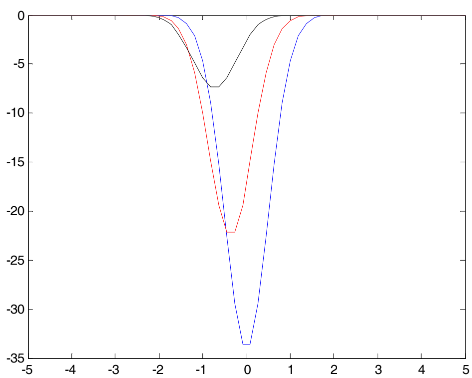

Рис.1. Распространение нелинейных волн

5. Заключение

В работе дается численное решение нелинейного уравнения, описывающего распространения нелинейных волн в двухфазных континуумах. В первом приближении получено дисперсионное уравнение для скорости стационарно бегущих линейных волн, во втором приближении - нелинейное уравнение эволюции, мера эффект нелинейности которого сильно зависит от скорости дисперсии волн, диссипации энергии, реологии твердых частиц и силы межфазного взаимодействия. Результаты иллюстрированы в виде графика.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рамазанов Т.К. Нелинейные волны в двухфазных системах, International Applied Mechanics, Киев, 1995, V.31, N.8, 1995, c.38-45.
2. Рамазанов Т.К., Курбанов А.И. Математическая модель эволюции нелинейных волн в пористых средах при двухфазном насыщении, Труды ИММ АН Азербайджана , Том IX(XVII), 1998, c.157-166.
3. Шагапов В.Ш., Гималтдинов И.К., Галимзянов М.Н. Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьки, Механика жидкости и газа, №2, 2002, c.139-147.
4. Ильичев А.Т. Уединенные волны в моделях гидромеханики, Физматлит, М.: 2003, 256 с.
5. Ramazanov T.K., Kurbanov A.I.,Askerov T.M. Nonlinear waves in micrononequilibrium porous medium at two-phase saturation, Proceedings of IMM of ANAS, 2004, XX(XXVIII), pp.173-182.
6. Ramazanov T.K. On unequal solvability of the evolutionary KdVRD equation, The Second International Conference. Tools for mathematical modeling, Saint-Petersburg, 1999, pp.115-116.
7. Т.К. Рамазанов. Механика землетрясений, их предвестники и тектонические волны, Баку, 2005, 407 с.
8. А.А.Самарский. Введение в численные методы, Изд-во «Наука», 1982, 284 с.

Mürəkkəb məsaməli mühitlərdə soliton dalğaların sürətinin ədədi üsulla tapılması

N.V. Bayramova, M.M. Mütəllimov

XÜLASƏ

İkifazalı məsaməli mühitlərdə qeyri-xətti dalğaların yayılmasını təsvir edən qeyri-xətti tənliyin ədədi üsulla həlli məsələsinə baxılır. Bu zaman hərəkət edən koordinat sistemi vasitəsilə zaman və məkan miqyasını dəyişməklə həyəcanlanma mənbəyindən yayılan dalğanın evolyusiyası tədqiq edilir. Soliton dalğaların sürəti hesablanır, uyğun qiymətlərdə qeyri-xətti dalğaların hərəkəti hesablanaraq məsələnin qrafiki qurulur.

Açar sözlər: soliton dalğalar, approksimasiya, məsaməli mühit

A numerical method to obtain the speed of soliton waves in porous medium

N.V. Bayramova, M.M. Mutallimov

ABSTRACT

Nonlinear waves evolution in porous medium with two-phase pore filling has been created. Changing time and place with the help of the moving coordinating system waves evolution spread from vibrated and impulse reservoir is explored. The speed of soliton waves is found, and graphic of nonlinear waves is given.

Keywords: soliton waves, approximation, porous medium